Tentamen Fouriertheorie, 05-11-03, 09.00–12.00 uur

Alle te gebruiken formules met betrekking tot Fourierreeksen en Fourierintegralen worden in de text van dit tentamen vermeld. Gebruik alleen deze formules!

1. (a) Toon aan dat $\lim_{n\to\infty} f_n(1/n) = 0$ als $f_n : [0,1] \to \mathbb{C}$ uniform naar de nulfunctie convergeert.

   (b) Toon aan dat $f_n(x) = nx(1-x)^n$ niet uniform naar de nulfunctie convergeert op $[0,1]$.
   Aanwijzing: gebruik de standaardlimiet $\lim_{n\to\infty}(1-1/n)^n = 1/e$ en onderdeel (a).

   (c) Toon aan dat de functies $f_n(x)$ in onderdeel (b) wel uniform convergeren op $[a,1]$ als $0 < a < 1$.
   Aanwijzing: gebruik de standaardlimiet $\lim_{n\to\infty} nb^n = 0$ als $0 \leq b < 1$.

2. (a) Neem aan dat $f \in L^1(0,\infty)$ en definieer $f_n(x) = e^{-nx}f(x)$. Bepaal met behulp van de gedomineerde convergentiestelling

   $$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,dx.$$

   Laat zien hoe het antwoord verkregen wordt.

   (b) Definieer $f_n(x) = n^\alpha$, $|x| \leq 1/n$, $f_n(x) = 0$ elders. Bepaal alle $\alpha \in \mathbb{R}$ waarvoor

   $$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)\,dx = +\infty.$$

   Vindt hier gedomineerde of monotone convergentie plaats?

3. Definieer de functie $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ als 2π-periodieke functie door $f(t) = te^{it}$.

   (a) Bereken de complexe Fourierreeks

   $$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n e^{inx}, \quad c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-int}\,dt.$$

   Aanwijzing: beschouw $n = 1$ apart.

(b) Laat zien

$$x \sin x = \sum_{n \neq 1} \frac{(-1)^n}{1-n} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

(c) Laat zien

$$x \sin x = 1 - \frac{1}{2} \cos x - 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2 - 1} \cos nx, \quad -\pi < x < \pi.$$

?

(d) Laat zien

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2 - 1} = \frac{3}{4}.$$

Beargumenteer het antwoord.

4. Definieer de functies f en g door

$x \leq 0$

$$f(t) = 1, \quad |t| \leq 1, \quad f(t) = 0, \quad |t| > 1,$$

en

$$g(x) = 2 - |t|, \quad |t| \leq 2, \quad g(t) = 0, \quad |t| > 2.$$

(a) Laat zien dat $g = f * f$.
Aanwijzing: $(f * f)(x) = \int_{-1}^{1} f(x-t)\, dt$ en de integrand is ongelijk 0 als $-1 + x \leq t \leq x + 1$. Maak voor $x \geq 0$ een onderscheid tussen $0 \leq x \leq 2$ en $2 \leq x$.

(b) Bepaal $\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} f(t)\, dt$.

(c) Bepaal $\widehat{g}(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{ixt} g(t)\, dt$ zonder rekenwerk.

(d) Bepaal

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^4 x}{x^4}\, dx.$$

Aanwijzing: gebruik $\int_{\mathbb{R}} |\widehat{g}(x)|^2\, dx = 2\pi \int_{\mathbb{R}} |g(t)|^2\, dt$.